Les nombres à période maximale, ou nombres premiers longs

mathcurves@gmail.com

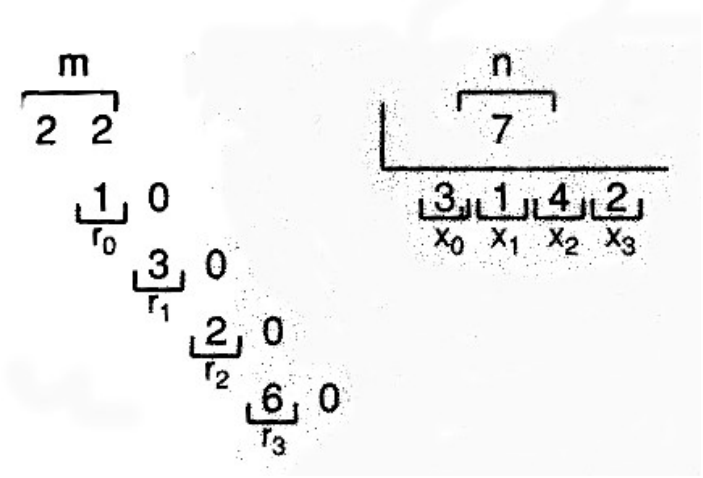
Vous avez certainement remarqué que lorsqu'on effectue une division, les décimales finissent toujours par revenir périodiquement. En effet, à partir du moment où l'on commence à "abaisser" des zéros, comme il n'y a qu'un nombre fini de restes possible (égal au diviseur), on finit toujours par obtenir un reste que l'on a déjà obtenu, et les décimales se reproduisent alors de façon identique à la séquence précédente.
Mais peut-être avez vous aussi remarqué que les divisions par 7 donnaient des résultats très spéciaux. Regardez :
1/7=0, 142857 142857 142857....
2/7= 0, 2857 142857 142857...
22/7 = 3, 142857 142857 142857....
1998/7 = 285, 42857 142857 142857...

Quel que soit le numérateur (sauf si c'est un multiple de 7 bien sur), on finit toujours par obtenir 1 4 2 8 5 7 qui se répète à l'infini.

On peut aussi remarquer que la longueur de la période est toujours la même : longueur 6 pour une division par 13, longueur 2 pour une division par 11, longueur 4 pour une division par 101 ... Regardons tout ceci de plus près.

Nous avons déjà vu que la périodicité des décimales provenait de la périodicité des restes, et que la longueur de la période ne pouvait pas dépasser la valeur du diviseur (c'est à dire le dénominateur de la fraction correspondante). Or pour 7, cette longueur atteint 6. C'est en fait le maximum possible. En effet, si cette longueur avait été 7, le reste 0 aurait été obtenu, ce qui signifie que le résultat aurait été un nombre décimal...
Les divisions par 7 ont donc une période de longueur maximale. Nous allons voir que c'est ce qui fait que cette période est toujours la même.

Examinons comment s'effectue la division d'un entier *m* par un entier $n \geq 2$:



Comme ce sont les chiffres après la virgule qui nous intéressent, considérons directement le quotient (exact) x_0 de la division de *m* par *n* (x_0 est la partie entière de *m/n*), et le reste r_0 de

cette division. La première décimale après la virgule, x_1, est obtenue comme le quotient de la division de $10r_0$ par *n* (exercice : pourquoi ce nombre est-il forcément compris entre 0 et 9 ?). Désignant par r_1 le reste de cette division, la deuxième décimale x_2 est le quotient de $10r_1$ par *n* et ainsi de suite. Résumons :

$$\frac{m}{n} = x_0, x_1 x_2 \ldots x_i \ldots \quad \text{avec}$$

$$\begin{cases} x_0 = \text{quotient}(m,n), \quad r_0 = \text{reste}(m,n) \\ x_1 = \text{quotient}(10r_0,n), \quad r_1 = \text{reste}(10r_0,n) \\ \ldots. \\ x_i = \text{quotient}(10r_{i-1},n), \quad r_i = \text{reste}(10r_{i-1},n) \\ \ldots. \end{cases}$$

Si l'on écrit ces divisions euclidiennes successives sous la forme classique :
dividende = diviseur× quotient + reste, on obtient :

$$\begin{cases} m = nx_0 + r_0 \\ 10r_0 = nx_1 + r_1 \\ \ldots \\ 10r_{i-1} = nx_i + r_i \\ \ldots \end{cases}$$

de sorte que $\frac{m}{n} = x_0 + \frac{r_0}{n} = x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{r_1}{10n} = \ldots.$, ce qui donne, en poursuivant :

$$\frac{m}{n} = x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \ldots + \frac{x_i}{10^i} + \frac{r_i}{10^i n} \quad (1)$$

Comme $\lim_{i \to +\infty} \frac{r_i}{10^i n} = 0$ (à justifier !), on démontre ainsi rigoureusement que :

$$\frac{m}{n} = \lim_{i \to +\infty} x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \ldots + \frac{x_i}{10^i} = \lim_{i \to +\infty} x_0, x_1 \ldots x_i .$$

Attention : il ne faut pas confondre $x_0, x_1 x_2 \ldots x_i$ (qui est un nombre décimal) avec $\frac{m}{n} = x_0, x_1 x_2 \ldots x_i \ldots$!!

Pourquoi la suite des reste r_i est-elle périodique ? Parce que c'est une suite récurrente simple (chaque terme r_i est défini à partir du précédent par une opération indépendante de *i*) qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Or, on peut aussi définir les restes r_i autrement que par récurrence. En effet, la formule (1) ci-dessus peut aussi s'écrire : $10^i m = n(10^i x_0 + 10^{i-1} x_1 + \ldots + 10 x_{i-1} + x_i) + r_i \quad (1')$, de sorte que :

r_i est le reste de la division de $10^i m$ par *n*.

Et comme les décimales x_i sont directement liées aux restes r_i (par $x_i = \text{quotient}(10r_{i-1}, n)$), on peut donc énoncer :

Théorème 1 : la longueur de la période du développement décimal du rationnel $\frac{m}{n}$ est égale à la longueur de la période des restes des divisions par *n* des produits des puissances successives de 10 avec *m*.

Pour 22/7, par exemple les restes des divisions par 7 des 22×10^i sont égaux successivement à 1, 3, 2, 6, 4, 5, et rebelotte, 1, 3, 2, 6, 4, 5 etc (ce sont exactement les restes que vous obtenez quand vous posez la division de 22 par 7), qui sont bien de période 6, comme le développement de 22/7.

Si le rationnel $\frac{m}{n}$ est décimal, $\boxed{\frac{m}{n} = \frac{N}{10^k}}$ et $10^k m$ est divisible par n : r_k est donc nul et le développement se termine par des 0 (vous le saviez depuis longtemps).
Si réciproquement $\frac{m}{n}$ n'est pas décimal, $\frac{m}{n}$ n'est pas le quotient d'un entier par une puissance de 10 et les r_i sont donc tous non nuls. Ces restes ne peuvent donc prendre que $n - 1$ valeurs au plus et l'on déduit :
Corollaire du T. 1 : la longueur de la période du développement décimal du rationnel $\frac{m}{n}$ est au plus égale à $n - 1$.

Définition : un rationnel s'écrivant sous la forme $\frac{m}{n}$ ($n \geq 2$, *m* et *n* premiers entre eux, c'est-à-dire sans facteur commun autre que 1) est dit "à période décimale maximale" lorsque la plus petite période de son développement décimal a une longueur exactement égale à $n - 1$.

Nous allons voir maintenant que si $\frac{m}{n}$ est à période maximale, n est forcément premier (mais l'exemple de 1/11=0,090909... nous montre tout de suite que la réciproque est fausse).
Nous allons même énoncer un théorème de caractérisation complet :

Théorème 2 : le rationnel $\frac{m}{n}$ est à période décimale maximale si et seulement si

1) *n* est premier
2) *m* n'est pas un multiple de *n*
3) la longueur de la période des restes des divisions par *n* des puissances successives de 10 est égale à $n - 1$ (ce qui, en langage savant, se dit : $\overline{10}$ est un générateur du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$).

Démonstration (niveau Terminale +):
Nous allons utiliser la notion d'inverse modulo n : on dit qu'un entier y est un inverse modulo n d'un entier x lorsque xy est congru à 1 modulo n. On démontre que le produit de deux entiers ayant un inverse modulo n en a également un, ainsi que le lemme :
si les entier 1, 2, ..., $n - 1$ ont tous un inverse modulo *n*, alors *n* est premier.
Montrons ce lemme : soit x un entier non multiple de n ; x est congru modulo n à l'un des entiers 1, 2, .., n et possède donc d'après l'hypothèse faite un inverse y modulo n qui vérifie $xy = 1 + kn$. D'après le théorème de Bézout, x et n sont premiers entre eux ; n est donc premier avec tout entier qu'il ne divise pas : n est premier. •

Montrons alors le théorème 2.

Si $\frac{m}{n}$ est à période maximale, d'après le théorème 1, l'un des entiers $10^i m$, disons $10^j m$ est congru à 1 modulo n ; 10 et m ont donc des inverses modulo n, et les entiers 1, 2, .., $n-1$, qui sont tous congrus à un entier du type $10^i m$ ont tous des inverses modulo n ; d'après le lemme, n est premier.
2) est évident, et d'après le petit théorème de Fermat, $10^j m \equiv 1 \equiv 10^{n-1}$ modulo n, donc $m \equiv 10^{n-1-j}$ modulo n. Les restes dans la division par n des $10^i m$ sont donc les mêmes que ceux des 10^{k+i} (où $k = n-1-j$). Ceci démontre 3).

Si réciproquement 1), 2) et 3) sont vérifiés, m, qui est congru à l'un des entiers 1, 2, .., $n-1$ modulo n est congru à une puissance de 10 modulo n et la longueur de la période des restes des divisions par n des produits des puissances successives de 10 avec m vaut donc $n-1$: $\frac{m}{n}$ est à période maximale.

Fin de la démonstration du Th 2.

Nous voyons qu'ici le numérateur m n'intervient plus que dans la condition n° 2. Nous avons donc une réponse à ce qui nous intriguait dans les divisions par 7.

Corollaire du Th 2: si $\frac{1}{n}$ est à période maximale, alors les nombres $\frac{m}{n}$ (m non multiple de n) sont tous à période maximale et ont tous la même période.

En effet, si $\frac{1}{n}$ est à période maximale, et m non multiple de n, il existe un entier j (entre 1 et $n-1$) tel que m est congru à 10^j modulo n ; si on désigne par r_i et x_i les suites d'entiers définis ci-dessus correspondant à $\frac{1}{n}$, et par r_i' et x_i' celles correspondant à $\frac{m}{n}$, alors, comme $10^i m \equiv 10^{i+j}$, $r_i' = r_{i+j}$ et donc $x_i' = x_{i+j}$.•

Par exemple, pour n = 7, comme les r_i ont pour période : 1,3,2,6,4,5 et les x_i : 1,4,2,8,5,7 on sait que :

$\frac{7k+1}{7} = k,142857...$, $\frac{7k+3}{7} = k,428571...$, $\frac{7k+2}{7} = k,285714...$,

$\frac{7k+6}{7} = k,857142...$, $\frac{7k+4}{7} = k,571428...$, et $\frac{7k+5}{7} = k,714285...$.

Le nombre N = 142 857 formé des chiffres de la période possède alors les mêmes propriétés de permutation :
$3N$ = 428 571, $2N$ = 285 714, $6N$ = 857 142, $4N$ = 571 428, $5N$ = 714 285 ; et que vaut donc $7N$? 999999 ! Normal, puisque $\frac{7}{7} = 0,999999...$!

Il est temps de rechercher un autre nombre n tel que $1/n$ soit à période maximale (de tels entiers sont dits « premiers longs »). On a vu que ni 11 ni 13 ne convenaient, mais pour 17, c'est OK. J'ai trouvé à l'aide du programme Maple : for i from 0 to 15 do 10^i mod 17 od, que les r_i sont égaux à : 1,10,15,14,4,6,9,5,16,7,2,3,13,11,8,12 et les x_i à : 0,5,8,8,2,3,5,2,9,4,1,1,7,6,4,7.
Je sais donc que si N = 588 235 294 117 647, $10N$ = 5 882 352 941 176 470, $15N$ = 8 823 529 411 764 705 etc...
Une recherche informatique donne facilement les prochains nombres premiers dont l'inverse est à période décimale. Ce sont : 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, 167, 179, 181, 193, 223, 229, 233, 257, 263, 269, 313, 337, 367, 379, 383, 389, 419, 433, 461, 487, 491, 499, etc (répertoriée https://oeis.org/A001913 dans l'OEIS).
Mais le mathématicien qui sommeille en chacun de nous aimerait bien avoir une caractérisation de ces nombres. En utilisant le fait que la longueur de la période de $1/p$ est forcément un diviseur de $p - 1$ (par le théorème de Lagrange) et le fait que $10^d - 1 = 9 \times \underbrace{111\ldots1}_{d \text{ chiffres } 1}$, j'ai trouvé la suivante :

Théorème 3 : $1/p$ est à période décimale maximale si et seulement si
1) p est premier ≠ 2, 3 et 5.
2) p ne divise aucun des nombres $\boxed{a_d = \underbrace{111\ldots1}_{d \text{ chiffres } 1}}$, avec d diviseur propre de $p - 1$.

Il est donc utile de connaître la décomposition en produit de facteurs premiers des a_d :
a_3=3. 37 ; a_4 = 11. 101, a_5 = 41. 271, a_6 = 3. 7. 11. 13. 37, a_7 = 239. 4649, etc...

1/13 n'est donc pas à période maximale car 13 divise a_6, avec 6 diviseur de 12 ;
1/37 n'est pas à période maximale car 37 divise a_6, avec 6 diviseur de 36 ;
1/41 n'est pas à période maximale car 41 divise a_5, avec 5 diviseur de 40 etc...

Les nombres qui ne sont pas à période maximale, ne sont pas inintéressants non plus. Par exemple comme 1/13 = 0, 076923 076923..., posons N = 76923 ; alors $2N$ = 153846, $3N$ = 230763, $4N$ = 307692, ... $13N$ = 999999. On obtient 6 permutations de 076923 et 6 permutations de 153846.
D'une façon générale, si la période de $1/n$ est de longueur l avec $ql = n - 1$, les multiples du nombre N correspondant n'auront que q formes différentes permutées chacune l fois.

On peut enfin changer de base, car bien sur, le nombre dix n'a rien de particulier, hormis le fait que nous ayons dix doigts. Tout ce qui précède peut donc se transposer en base a quelconque. En particulier, l'inverse du nombre premier p est à période maximale en base a si et seulement si la longueur de la période des restes des divisions par p des puissances successives de a est égale à $p - 1$ (ou encore, pour les savants : $\overline{a}$ est un générateur du groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, et il y a $\varphi(p-1)$ tels générateurs, où φ est l'indicateur d'Euler).
On peut donc, pour un nombre premier p, déterminer dans quelles bases $1/p$ est à période maximale.
Par exemple, 1/2 est à période maximale dans toute base impaire,
1/3 est à période maximale en base $3m + 2$ (où il s'écrit 0, m ($2m + 1$) m ($2m + 1$) ...),
1/5 est à période maximale en base $5m + 2$ (où il s'écrit 0, m (2 m) (4 m + 1) (3 m + 1) ...),
et en base 5 m + 3 (où il s'écrit 0, m (3 m + 1) (4 m + 2) (2 m + 1)...),
1/11 est à période maximale en base 13 (où il s'écrit 0,12495αβ837...),
et 1/13 est à période maximale en base 11 etc...

Exercice : caractériser les nombres premiers d'inverse à période maximale en base 2, comme nous l'avons fait pour 10.